Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Metoda elementów skończonych (MES1)

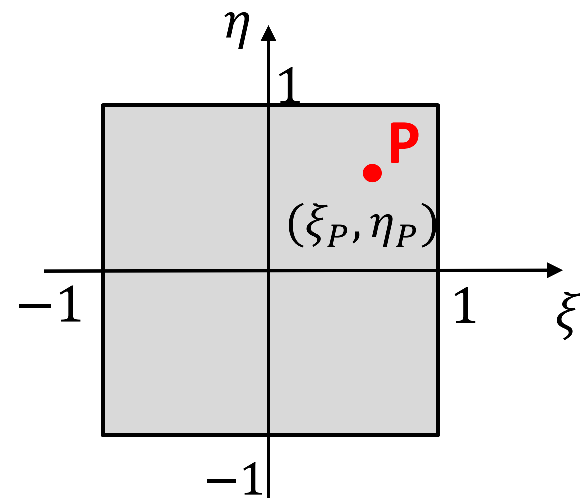
Wykład 4B. 8-węzłowy element czworokątny przykład

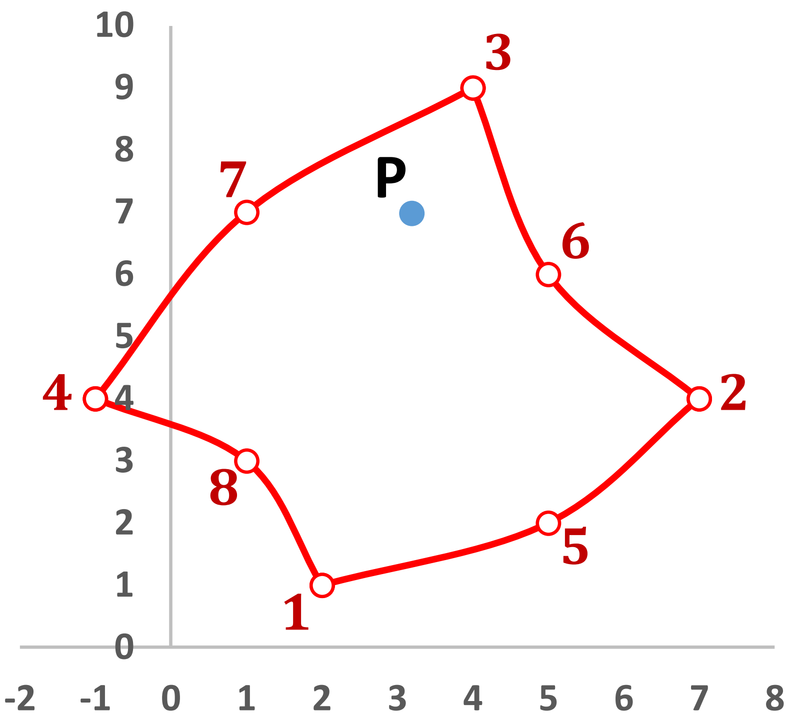
03.2024

Przykład 1. Element 8-węzł. Znaleźć współrzędne i det [J] w punkcie **P**

współrzędne w układzie naturalnym:

$$\xi_P = \eta_P = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

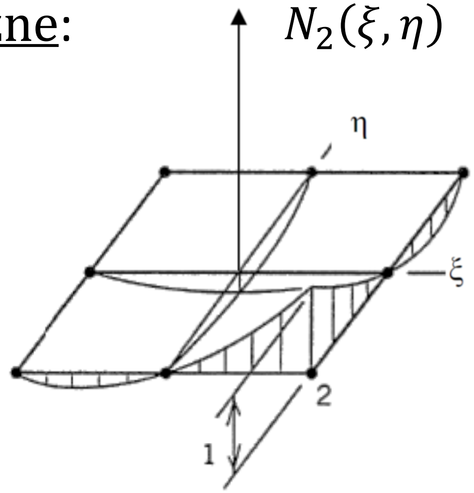




$$\underset{8\times1}{\{x_i\}_e} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \underset{8\times1}{\{y_i\}_e} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Funkcje kształtu 8-węzłowego elementu czworokątnego

węzły narożne:



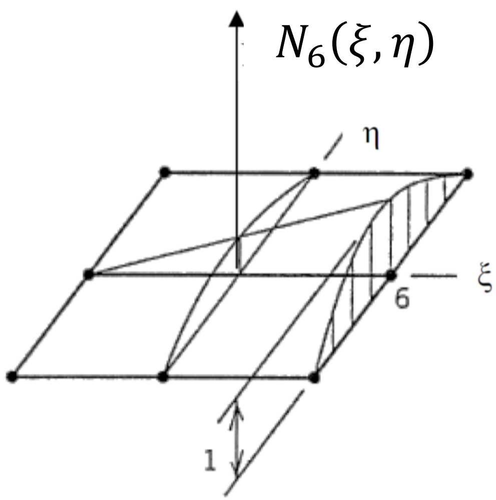
$$N_1(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$N_3(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$N_4(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

węzły w środku boków:



$$N_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

Przykładowa funkcja kształtu i jej pochodna dla węzła 1

$$N_1(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)\,\frac{\partial\left[(1-\xi)\cdot(1+\xi+\eta)\right]}{\partial \xi} =$$

$$= -\frac{1}{4}(1-\eta)\left[\frac{\partial(1-\xi)}{\partial \xi}(1+\xi+\eta) + \frac{\partial(1+\xi+\eta)}{\partial \xi}\cdot(1-\xi)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(1-\eta)\left[-1\cdot(1+\xi+\eta) + 1\cdot(1-\xi)\right] =$$

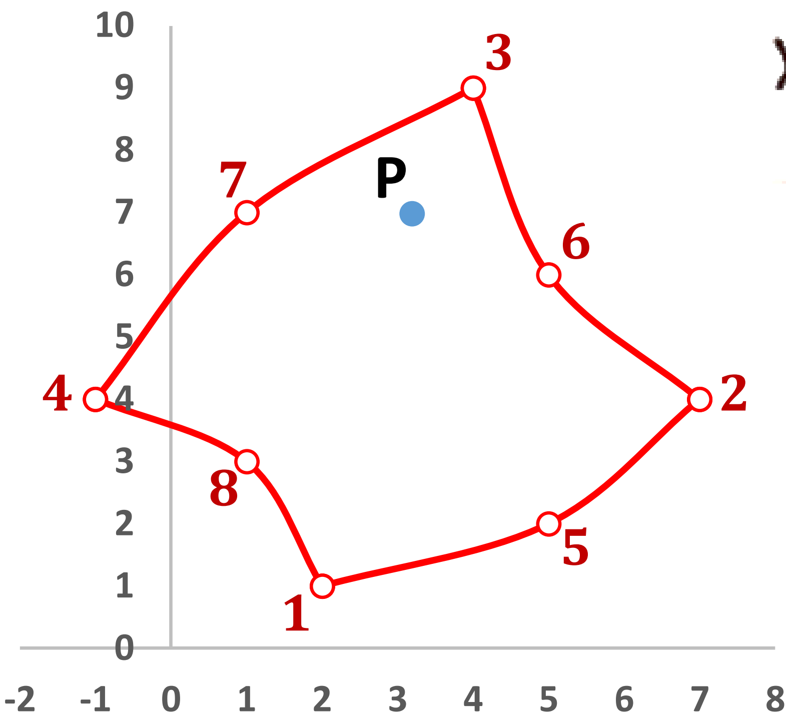
$$= -\frac{1}{4}(1-\eta)\left[-1-\xi-\eta+1-\xi\right] = -\frac{1}{4}(1-\eta)\left[-2\xi-\eta\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta)$$

Funkcje kształtu i ich pochodne dla elementu 8-węzłowego

i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta)$
2	$\frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta)$
4	$\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$
5	$-(1-\eta)\xi$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
6	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\cdot\eta$
7	$-(1+\eta)\xi$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
8	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\cdot\eta$

Współrzędne punktu P aproksymowane funkcjami kształtu



współrzędne w układzie kartezjańskim:

$$x_P = \lfloor \underset{1\times 8}{N(\xi_P, \eta_P)} \rfloor \cdot \{\underset{8\times 1}{x_i}\}_e = 3.1925 \text{ mm}$$

$$y_P = \lfloor \underset{1\times 8}{N(\xi_P, \eta_P)} \rfloor \cdot \{\underset{8\times 1}{y_i}\}_e = 6.9761 \text{ mm}$$

$$\underset{8\times 1}{\{x_i\}_e} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{y_i\}_e = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy Jacobiego dla punktu P

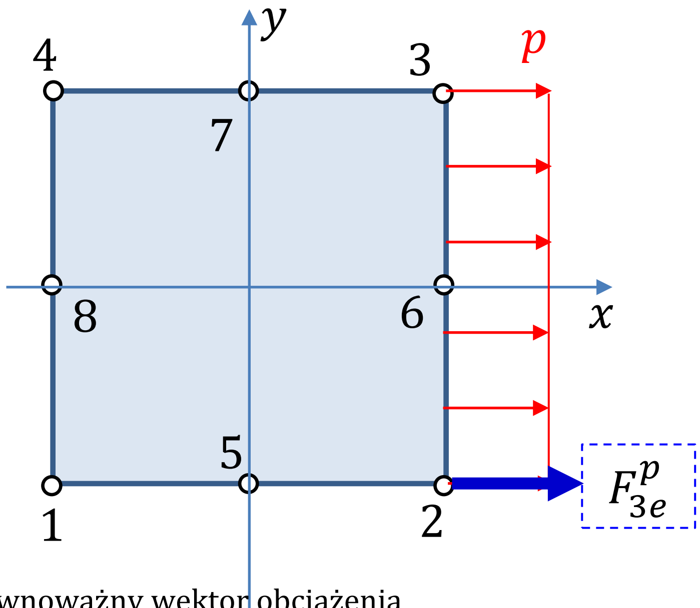
$$det[J]=\left(\underset{1\times 8}{\frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\xi}}\ \underset{8\times 1}{\{x_i\}_e}\right)\left(\underset{1\times 8}{\frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\eta}}\ \underset{8\times 1}{\{y_i\}_e}\right)-\left(\underset{1\times 8}{\frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\xi}}\ \underset{8\times 1}{\{y_i\}_e}\right)\left(\underset{1\times 8}{\frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\eta}}\ \underset{8\times 1}{\{x_i\}_e}\right)$$

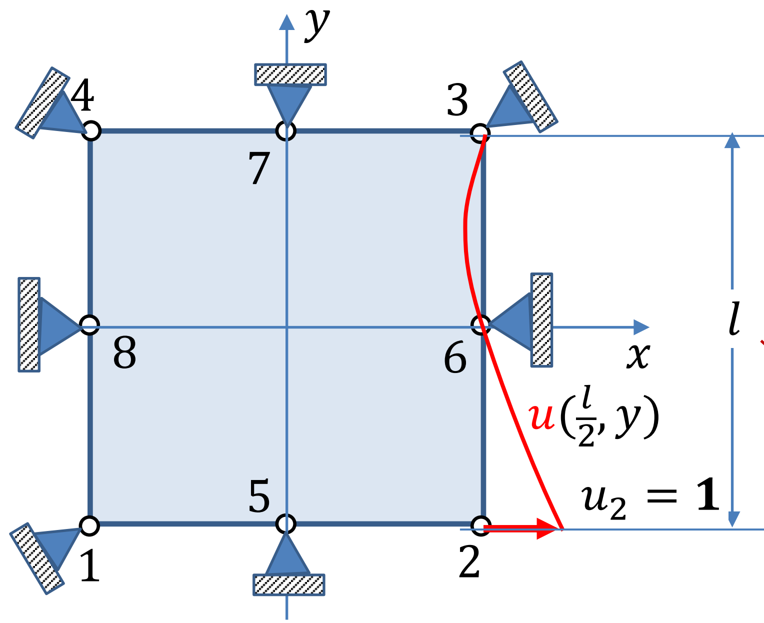
$$\{x_i\}_e=\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\7\\4\\-1\\5\\5\\1\\1\end{Bmatrix}\quad;\quad \{y_i\}_e=\begin{Bmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\4\\9\\4\\2\\6\\7\\3\end{Bmatrix}$$

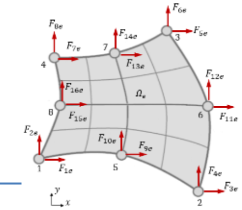
ξ	0.57735							
η	0.57735							
i	1	2	3	4	5	6	7	8
N	-0.09623	-0.16667	0.096225	-0.16667	0.140883	0.525783	0.525783	0.140883
dN/dξ	0.183013	0.061004	0.683013	0.227671	-0.24402	0.333333	-0.91068	-0.33333
dN/dη	0.183013	0.227671	0.683013	0.061004	-0.33333	-0.91068	0.333333	-0.24402
det[J]	**9.821367**							

Przykład 2 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8 –węzłowym od sił powierzchniowych

Poszukamy zastępczej siły w węźle **2** pochodzącej od stałego wydatku obciążenia p działającego na krawędzi 2-3







$$dy = \frac{l}{2}\, d\eta$$

równoważny wektor obciążenia
od obciążenia powierzchniowego:

$$\lfloor F^p \rfloor_e = t_e \int_0^l \lfloor p \rfloor [N]\, ds$$

$$\underbrace{F_{3e}^{p} \cdot 1}_{\text{Praca siły zastępczej } F_{3e}^{p} \text{ na przemieszczeniu 1}} = \underbrace{t_e \int_0^l p(x,y)\, u(\tfrac{l}{2}, y)\, dy}_{\text{praca obciążenia } p(x,y) \text{ na przemieszczeniu } u(x,y)}$$

$$F_{3e}^{p} = t_e \int_0^l p\, N_2\, dy$$

$$N_2(\xi,\eta) = -\tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

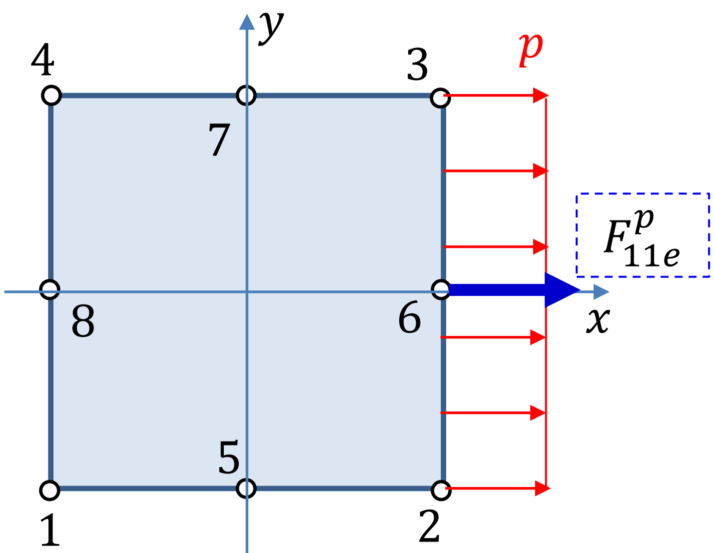
$$N_2(1,\eta) = -\tfrac{1}{2}(1-\eta)\eta$$

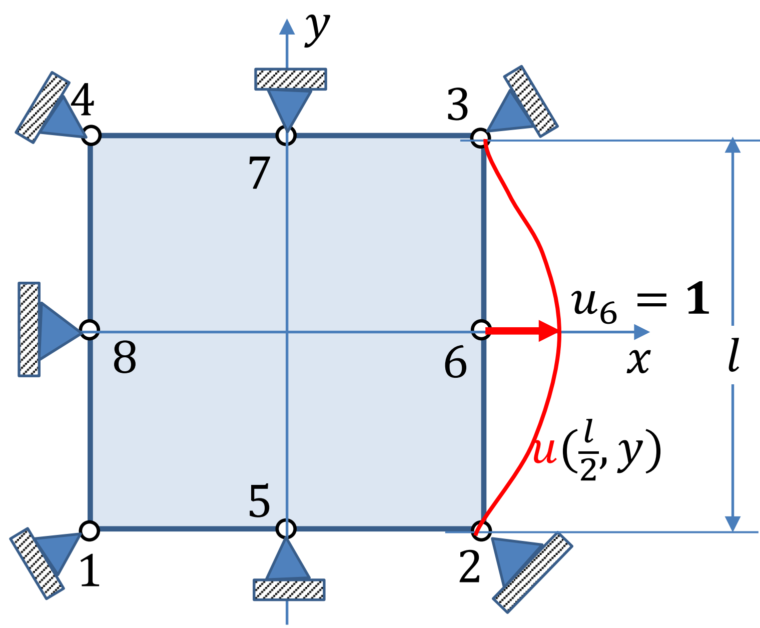
$$F_{3e}^{p} = t_e p \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(\eta - 1)\eta\ \tfrac{l}{2}\, d\eta =$$

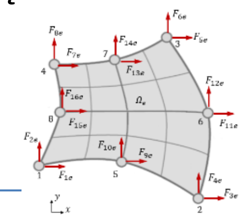
$$= \frac{p\, l}{4} t_e \left(\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \boxed{\frac{p\, l}{6} t_e}$$

Przykład 2 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8 –węzłowym od sił powierzchniowych

<u>Poszukamy zastępczej siły w węźle **6**</u> pochodzącej od stałego wydatku obciążenia p działającego na krawędzi 2-3







$$dy = \frac{l}{2}\, d\eta$$

równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$\lfloor F^p \rfloor_e = t_e \int_0^l \lfloor p \rfloor [N]\, ds$$

$$\underbrace{F_{11e}^{p} \cdot 1}_{\text{Praca siły zastępczej } F_{11e}^{p} \text{ na przemieszczeniu 1}} = \underbrace{t_e \int_0^l p(x,y)\, u(\tfrac{l}{2}, y)\, dy}_{\textit{praca obciążenia } p(x,y) \text{ na przemieszczeniu } u(x,y)}$$

$$F_{11e}^{p} = t_e \int_0^l p\, N_6\, dy$$

$$N_6(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

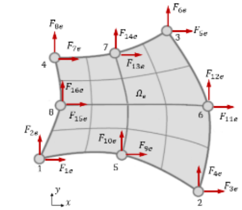
$$N_6(1,\eta) = 1 - \eta^2$$

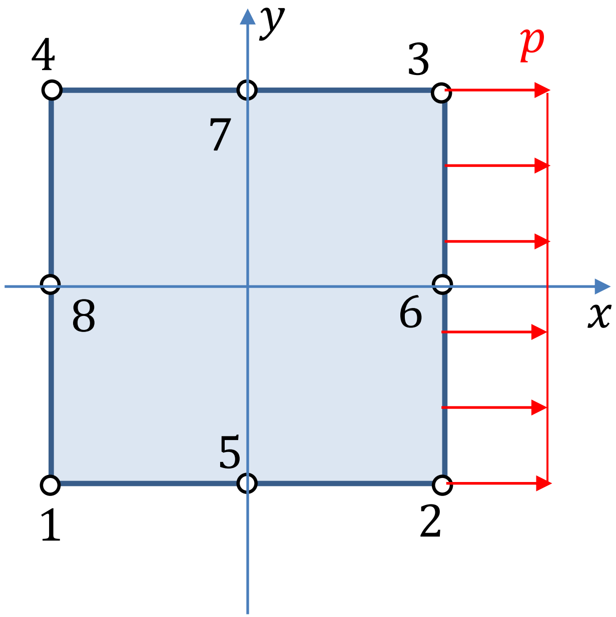
$$F_{11e}^{p} = t_e p \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)\, \tfrac{l}{2}\, d\eta =$$

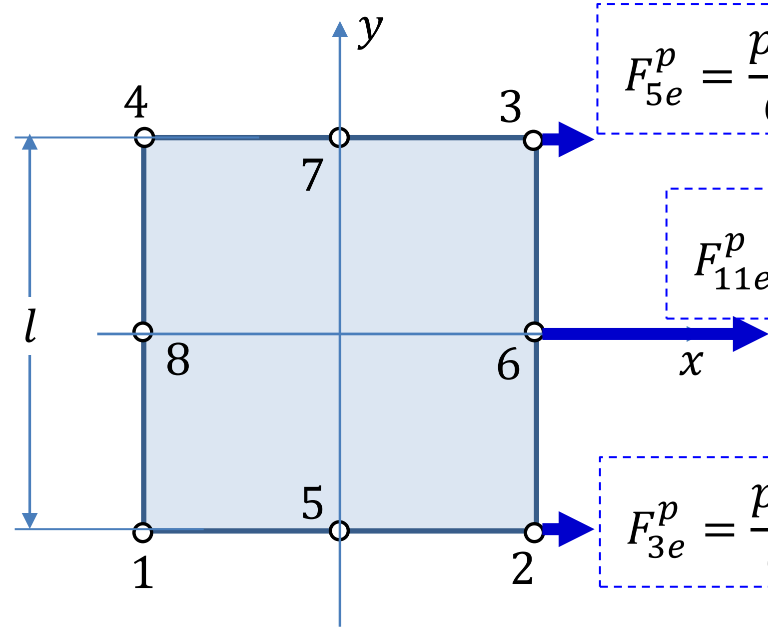
$$= \frac{p\,l}{2} t_e \left(\eta - \frac{1}{3}\eta^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \boxed{\frac{2p\,l}{3} t_e}$$

Przykład 2 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8 –węzłowym od sił powierzchniowych

Węzłowe siły zastępcze pochodzącej od stałego wydatku obciążenia p działającego na krawędzi 2-3







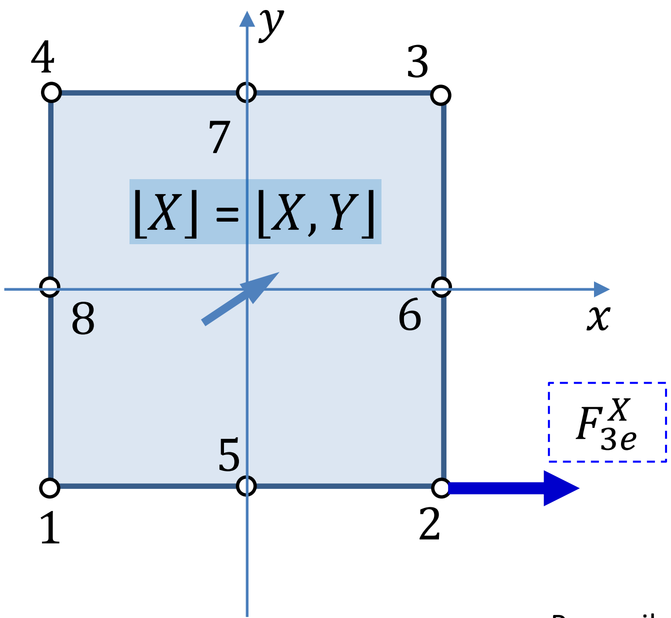
$$F_{5e}^{p} = \frac{p\,l}{6} t_e$$

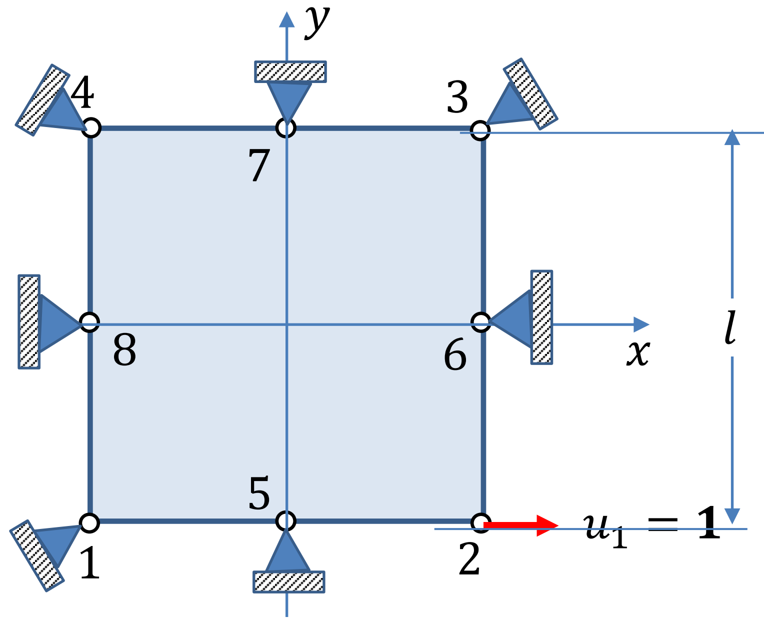
$$F_{11e}^{p} = \frac{4p\,l}{6} t_e$$

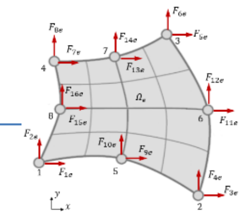
$$F_{3e}^{p} = \frac{p\,l}{6} t_e$$

Przykład 3 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8 –węzłowym od sił masowych

Poszukamy zastępczej siły w węźle **2** pochodzącej od stałego wydatku obciążenia masowego ***X***







$$dy = \frac{l}{2}\, d\eta$$

$$dx = \frac{l}{2}\, d\xi$$

równoważny wektor obciążenia od obciążenia masowego:

$$\lfloor F^X \rfloor_e = t_e \int_{A_e} \lfloor X \rfloor [N] dA_e$$

$$\underbrace{F_{3e}^{X} \cdot 1}_{\text{Praca siły zastępczej } F_{3e}^{X} \text{ na przemieszczeniu 1}} = \underbrace{t_e \int_{A_e} X\, u(x,y)\, dA}_{\textit{pracy obciążenia } X \text{ na przemieszczeniu } u(x,y)}$$

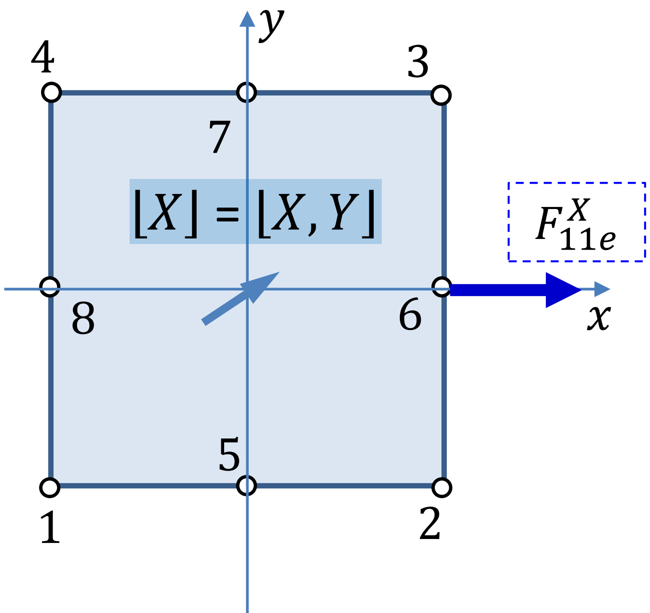
$$\boxed{F_{3e}^{X} = t_e \int_{A_e} X\, N_2\, dA}$$

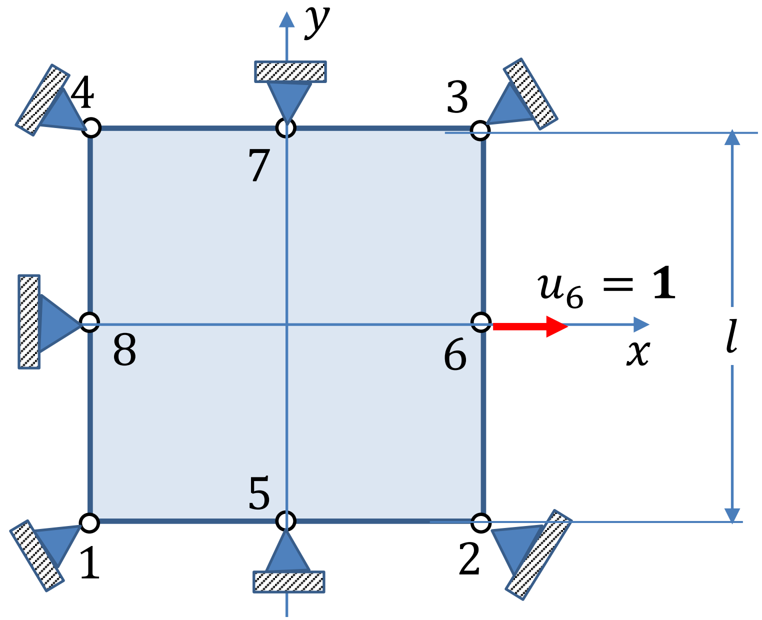
$$N_2(\xi,\eta) = -\tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

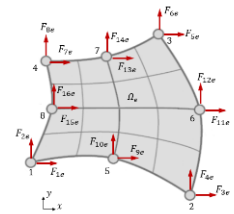
$$F_{3e}^{X} = t_e X \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} -\tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)\, \tfrac{l}{2}\, d\xi\, \tfrac{l}{2}\, d\eta = \boxed{-\tfrac{1}{12}\, t_e X l^2}$$

Przykład 3 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8 –węzłowym od sił masowych

Poszukamy zastępczej siły w węźle **6** pochodzącej od stałego wydatku obciążenia masowego ***X***







$dy = \frac{l}{2}\, d\eta$

$dx = \frac{l}{2}\, d\xi$

równoważny wektor obciążenia od obciążenia masowego:

$$\lfloor F^X \rfloor_e = t_e \int_{A_e} \lfloor X \rfloor [N] dA_e$$

$$\underbrace{F_{11e}^{X} \cdot 1}_{\text{Praca siły zastępczej } F_{11e}^{X} \text{ na przemieszczeniu 1}} = \underbrace{t_e \int_{A_e} X\, u(x,y)\, dA}_{\text{pracy obciążenia } X \text{ na przemieszczeniu } u(x,y)}$$

$$\boxed{F_{11e}^{X} = t_e \int_{A_e} X\, N_6\, dA}$$

$$N_6(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$F_{11e}^{X} = t_e X \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\,\tfrac{l}{2}\, d\xi\, \tfrac{l}{2}\, d\eta = \boxed{\tfrac{1}{3} t_e X l^2}$$

Przykład 3 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8 –węzłowym od sił powierzchniowych

Węzłowe siły zastępcze pochodzącej od stałego wydatku obciążenia masowego $\boldsymbol{X} = \lfloor X, Y \rfloor$